Tentamen Vectoranalyse
23 februari 2006

Zet op elk vel je naam en student nummer. Gebruik voor elke som aparte vellen. De nummers tussen de haakjes geven het aantal punten aan voor die opgave.

$$\text{Cijfer} = 1 + \frac{\#}{3}$$

I) (5) Laat $D = \{(x,y) | \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x), x \in [a,b]\}$ waarbij $\phi_1, \phi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ en

- $\phi_1(x) < \phi_2(x)$ voor alle $x \in (a,b)$,
- $\phi_1(a) = \phi_2(a)$,
- $\phi_1(b) = \phi_2(b)$.

Bewijs

$$\int_{\partial D} P dx = -\int\int_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy.$$

II) Laat $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeven zijn door

$$f(x,y) = x^2 - y,$$
$$g(x,y) = x^3 - y.$$

a) (4) Bepaal alle kandidaten voor extremen van f onder de conditie $g = 0$.

b) (4) Gebruik de Hessianen van f en g om het type van deze kandidaten te bepalen.

III) Laat $D = \{(x,z) | x^2 + z^2 \leq 1\}$ en $\phi : D \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$\phi(x,z) = 10 + x^2 \sin^3(z).$$

Verder beschouw de oppervlakken

$$B = \{(x,y,z) | x^2 + z^2 = 1 \text{ en } 0 \leq y \leq \phi(x,z)\},$$

en

$$S = \{(x,y,z) | x^2 + z^2 \leq 1 \text{ en } y = \phi(x,z)\}.$$

4

De rand van B bestaat uit twee lussen, ∂D en ∂S. Het vectorveld F is gegeven door

$$F(x,y,z) = (-z, 0, x).$$

a) (3) Laat zien dat als $(x,y,z) \in B$ dan geldt dat $\text{curl}(F)(x,y,z)$ ligt in het raakvlak van B in (x,y,z).

b) (5) bewijs dat

$$\int_{\partial S} F \cdot ds = \int_{\partial D} F \cdot ds$$

c) (3) Bereken

$$\int_{\partial S} F \cdot ds.$$

IV) (3) Laat $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd zijn door

$$f(x, y) = x^2 + 3y^2.$$

Laat verder het lichaam

$$W = \{(x, y, z) | x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq f(x, y), x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Bereken het volume van W.

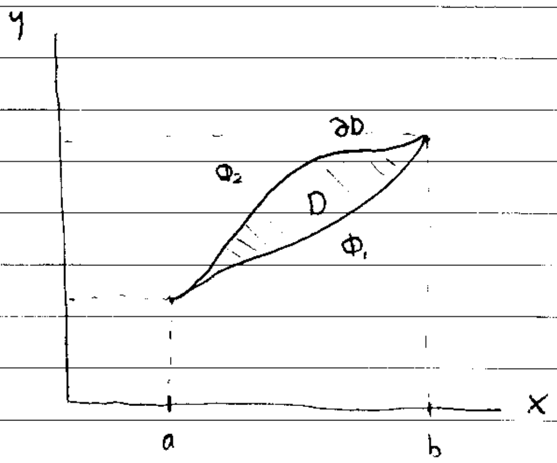
Hint: merk op dat het volume van W het "volume onder de grafiek" is van een of andere functie.

Afdeling Wiskunde en Informatica R.U.G.

Naam: Roel Tempelaar	Studentnummer: 1466879	Bladnr.: 1/5
Adres:	Studierichting:	Tentamen:
Postcode en		Datum:
Woonplaats:	Jaar van eerste inschrijving:	Naam docent:

10

I



$D = \{ (x,y) \mid \Phi_1(x) \leq y \leq \Phi_2(x),\ x \in [a,b] \}$

$\Phi_1(x) < \Phi_2(x) \quad \forall\, x \in (a,b)$

$\Phi_1(a) = \Phi_2(a)$ en $\Phi_1(b) = \Phi_2(b)$

stelling: $\int_{\partial D} P\,dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$

bewijs:

$P(x,y): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\int_{\partial D} P\,dx = \int_a^b P(x,\Phi_1(x))\,dx + \int_b^a P(x,\Phi_2(x))\,dx$

$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int_{\Phi_1(x)}^{\Phi_2(x)} \int_a^b \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dx\,dy$

5 $\quad = -\int_a^b \int_{\Phi_1(x)}^{\Phi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dy\,dx$

$= -\int_a^b \left[P(x,y) \right]_{\Phi_1(x)}^{\Phi_2(x)}\,dx$

$= -\int_a^b \left(P(x,\Phi_2(x)) - P(x,\Phi_1(x)) \right) dx$

$= \int_a^b P(x,\Phi_1(x))\,dx - \int_a^b P(x,\Phi_2(x))$

$= \int_a^b P(x,\Phi_1(x))\,dx + \int_b^a P(x,\Phi_2(x))$

$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int_{\partial D} P\,dx$

Afdeling Wiskunde en Informatica R.U.G.

Naam: Roel Tempelaar	Studentnummer: 1466879	Bladnr.: 2/5
Adres:	Studierichting:	Tentamen:
Postcode en		Datum:
Woonplaats:	Jaar van eerste inschrijving:	Naam docent:

II $\quad f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad f(x,y) = x^2 - y$

$\qquad g(x,y) = x^3 - y$

a) kandidaten v. f onder $g = 0$

y

$\nabla f = \lambda \nabla g$ geeft:

$$\begin{pmatrix} 2x \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3x^2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

dus $\lambda = 1$ en $2x = \lambda 3x^2 = 3x^2$

$x(2 - 3x) = 0$

$x = 0 \quad \vee \quad x = \frac{2}{3}$

bovendien geldt: $x^3 - y = 0 \Rightarrow y = x^3$

$x = 0$: $\quad y = 0$

$x = 2/3$: $\quad y = 8/27$

dus de kandidaten zijn:

$(x,y) = (0,0)$ en $(x,y) = \left(\frac{2}{3}, \frac{8}{27}\right)$

b) $h = f - \lambda g = x^2 - \lambda x^3 - y - \lambda y$

dit leidt tot de bordered Hessian:

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{\partial g}{\partial x} & -\frac{\partial g}{\partial y} \\ -\frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \\ -\frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

$$|\bar{H}| = \frac{\partial g}{\partial x}\left(- \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial^2 h}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}\right) - \frac{\partial g}{\partial y}\left(- \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 3x^2, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = -1$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 2x - 3\lambda x^2, \quad \frac{\partial h}{\partial y} = -1 - \lambda$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 2 - 6\lambda x, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = 0$$

invullen:

$$|\bar{H}| = 3x^2(-3x^2 \cdot 0 - 1 \cdot 0) + 1(-3x^2 \cdot 0 - 1 \cdot (2 - 6\lambda x))$$
$$= 6\lambda x - 2$$

de kandidaten:

$$(x, y, \lambda) = (0, 0, 1) \rightarrow |\bar{H}| = -2$$
$$= (2/3, 8/27, 1) \rightarrow |\bar{H}| = 6 \cdot \tfrac{2}{3} - 2$$
$$= 2$$

dus: $(x, y) = (0, 0)$ is een minimum
(want daar geldt $|\bar{H}| < 0$)

4

met $f(0,0) = 0$

$(x, y) = (2/3, 8/27)$ is een maximum
(want $|\bar{H}| > 0$)

met $f(\tfrac{2}{3}, 8/27) = 4/9 - 8/27 = 4/27$

Afdeling Wiskunde en Informatica R.U.G.

Naam: Roel Tempelaar	Studentnummer: 1466879	Bladnr.: 3/5
Adres:	Studierichting:	Tentamen:
Postcode en		Datum:
Woonplaats:	Jaar van eerste inschrijving:	Naam docent:

III $D = \{(x, z) \mid x^2 + z^2 \leq 1\}$

$\phi : D \to \mathbb{R} \qquad \phi(x,z) = 10 + x^2 \sin^3(z)$

$B = \{(x,y,z) \mid x^2 + z^2 = 1 \text{ en } 0 \leq y \leq \phi(x,z)\}$

$S = \{(x,y,z) \mid x^2 + z^2 \leq 1 \text{ en } y = \phi(x,z)\}$

$F(x,y,z) = (-z, 0, x)$

a) stelling: als $(x,y,z) \in B$
dan ligt $(\nabla \times F)$ in het
raakvlak van B in (x,y,z)

bewijs:

als $(x,y,z) \in B$, dan geldt

$x^2 + z^2 = 1$
$0 \leq y \leq \phi(x,z)$

3

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -z & 0 & x \end{vmatrix} = \hat{i}\,\frac{\partial}{\partial y}(x) - \hat{j}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x) - \frac{\partial}{\partial z}(-z)\right] + \hat{k}\left[-\frac{\partial}{\partial y}(-z)\right]$$

$$= \hat{j}\,(-1-1) = -2\,\hat{j}$$

oftewel, $(\nabla \times F) = (0, -2, 0)$ ligt in het raakvlak van B in (x,y,z) als $(x,y,z) \in B$
(herformulering van de stelling)

het is nu handig om B te parametriseren, als volgt:

$$\Psi(x,y) = (x, y, \sqrt{1-x^2})$$

$$\text{met} \quad -1 \leq x \leq 1$$
$$0 \leq y \leq 10 + x^2 \sin^3(\sqrt{1-x^2})$$

$$T_x = \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \left(1, 0, -2x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$T_y = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = (0, 1, 0)$$

$$T_x \times T_y = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & -2x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\left(\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\right) - \hat{j}(0) + \hat{k}(1)$$

$$= \left(\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}, 0, 1\right)$$

we ~~kunnen~~ zien dat $(T_x \times T_y)$ en $(\nabla \times F)$ loodrecht op elkaar staan, volgens:

$$(T_x \times T_y) \cdot (\nabla \times F) = \begin{pmatrix} \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

aangezien $(T_x \times T_y)$ de normaal is op het raakvlak van B in (x,y,z), kunnen we concluderen dat $\operatorname{curl}(F)(x,y,z)$ in het raakvlak van B in (x,y,z) ligt

Afdeling Wiskunde en Informatica R.U.G.

Naam: Roel Tempelaar	Studentnummer: 1466879	Bladnr.: 4/5
Adres:	Studierichting:	Tentamen:
Postcode en		Datum:
Woonplaats:	Jaar van eerste inschrijving:	Naam docent:

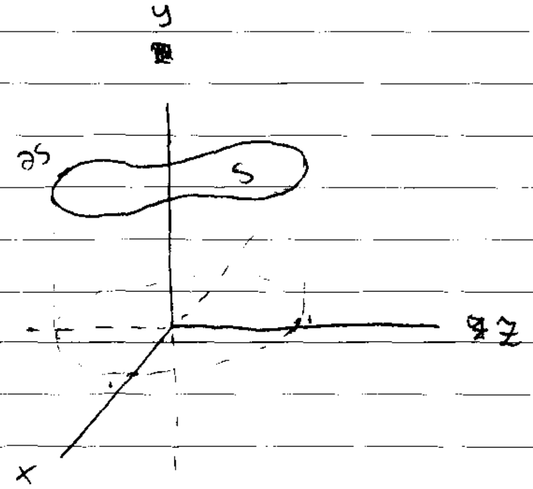
III b) stelling: $\int_{\partial S} F \cdot ds = \int_{\partial D} F \cdot ds$

5

bewijs:

$\partial D = \{ (x,z) \mid x^2+z^2=1 \}$

$\partial S = \{ (x,y,z) \mid x^2+z^2=1, \ y=10+x^2\sin^3(z) \}$



$F(x,y,z) = (-z, 0, x)$

$F \cdot ds = -z\,dx + 0\,dy + x\,dz$

welk pad ook gekozen wordt, de integraal hangt slechts af van de x- en de z-waarden, dus

$\int_{\partial S} F \cdot ds = \int_{\partial S_k} F \cdot ds \qquad \forall k \in \mathbb{R}$

waarbij $\partial S_k = \{ (x,y,z) \mid x^2+z^2=1, \ y=k \}$

stel $\partial D = \partial S_0 = \{ (x,y,z) \mid x^2+z^2=1, \ y=0 \}$

dan volgt:

$\int_{\partial S} F \cdot ds = \int_{\partial D} F \cdot ds$

c) gevraagd: $\int_{\partial S} F \cdot ds$

uit b) volgt: $\int_{\partial S} F \cdot ds = \int_{\partial D} F \cdot ds$

∂D kan als volgt geparametriseerd worden:

$\Psi(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$ met $\theta \in [0, 2\pi]$

dus $x = \cos\theta$, en $z = \sin\theta$

dan geldt:

3

$$\int_{\partial D} F \cdot ds = \int_0^{2\pi} F(\Psi(\theta))\, \Psi'(\theta)\, d\theta$$

let wel: $F(\Psi(\theta)) = F(\cos\theta, 0, \sin\theta)$
$= (-\sin\theta, 0, \cos\theta)$

$\Psi'(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta)$

dus $x'(\theta) = -\sin\theta$, $z'(\theta) = \cos\theta$
en $y'(\theta) = 0$

$$F(\Psi(\theta)) \cdot \Psi'(\theta) = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

dus: $\int_{\partial S} F \cdot ds = \int_{\partial D} F \cdot ds$

$$= \int_0^{2\pi} F(\Psi(\theta)) \cdot \Psi'(\theta)\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} 1 \, d\theta$$

$$= 2\pi$$

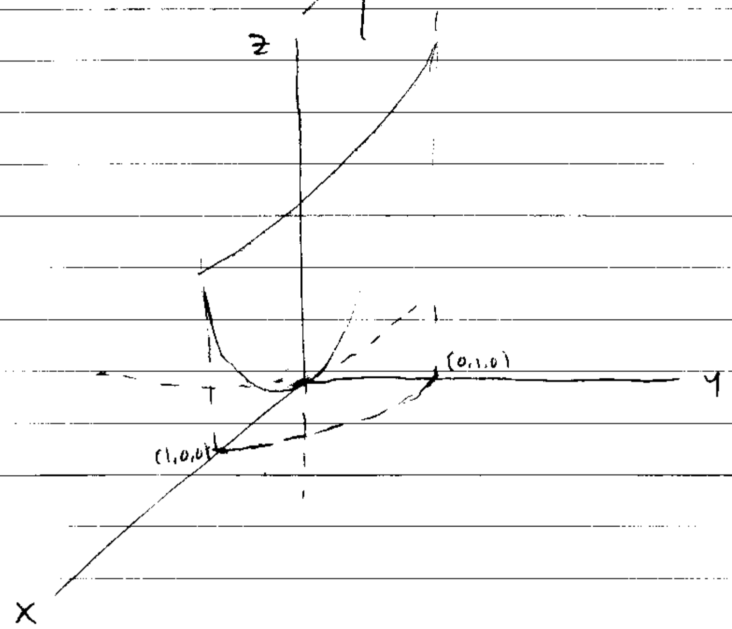
NB: notatie $G(u,v) = G(x,y,z)$ met
$x = u$, $y = 0$ en $z = v$
$G(u,v,w) = G(x,y,z)$ met
$x = u$, $y = v$, $z = w$

Naam: Roel Tempelaar	Studentnummer: 1466879	Bladnr.: 5/5
Adres:	Studierichting:	Tentamen:
Postcode en		Datum:
Woonplaats:	Jaar van eerste inschrijving:	Naam docent:

IV

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad f(x,y) = x^2 + 3y^2$

$W = \{(x,y,z) \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ 0 \leq z \leq f(x,y),\ x^2+y^2 \leq 1\}$



gevraagd: volume van W

stel $\quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$

dan geldt:

$$V(W) = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{f(x,y)} 1 \, dz \, dy \, dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y) \, dy \, dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + 3y^2) \, dy \, dx$$

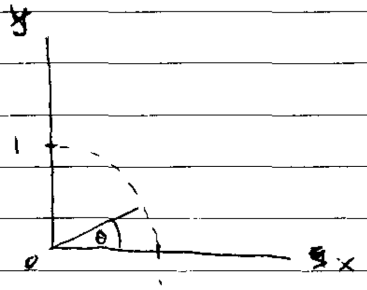
$$= \int_0^1 \left[x^2 y + y^3 \right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 \sqrt{1-x^2} + (1-x^2)^{3/2} \right) dx$$

$= (1) \qquad$ z.o.z.

aangezien dit een lelijke integraal oplevert zullen we het een en ander gaan parametriseren:

goed!



$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \qquad$ met $r \in [0,1]$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

~~$f(\theta) = \cos^2\theta + 3\sin^2\theta$~~

$f(r,\theta) = r^2\cos^2\theta + 3r^2\sin^2\theta$

hieruit volgt:

! $dx\,dy = r\,dr\,d\theta$

$$V(W) = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} (r^2\cos^2\theta + 3r^2\sin^2\theta)\, {}^{R}\, d\theta\, dr$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[\tfrac{1}{3}r^3\cos^2\theta + r^3\sin^2\theta\right]_0^1 d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[\tfrac{1}{3}(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + \tfrac{2}{3}\sin^2\theta\right] d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3}\sin^2\theta\right) d\theta$$

$$= \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\, d\theta$$

had ook gewerkt.

3 ook deze integraal is niet bepaald een van ongekende schoonheid... ??? Niet?

—

om terug te komen op punt (1) (vorige blz):

$$V(W) = \int_0^1 \left(x^2\sqrt{1-x^2} + (1-x^2)^{3/2}\right) dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,(x^2 + 1 - x^2)\, dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$$

$$V(W) = \frac{1}{4}\pi$$

(kwart van de eenheidsschijf) goed.